Dari Algebraic Topology ke Aljabar

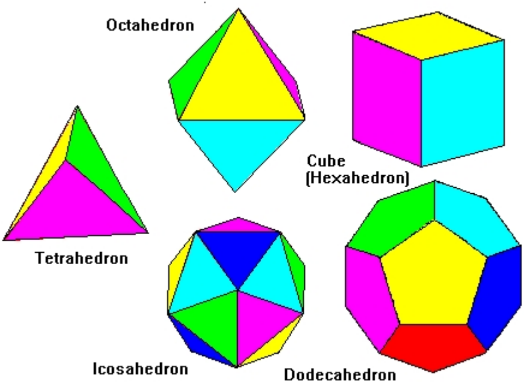
Hafiz Khusyairi

Motivasi

- Studi topologi diawali oleh studi terhadap graf dan platonic solid

Motivasi

- Studi topologi diawali oleh studi terhadap graf dan platonic solid



-

Motivasi

- Ada sebuah pola penting yang muncul pada platonic solids

Solids	Vertices	Edges	Faces
Tetrahedron	4	6	4
Cube	8	12	6
Octahedron	6	12	8
Icosahedron	12	30	20
Dedocahedron	20	30	12

Motivasi

- Ada sebuah pola penting yang muncul pada platonic solids

Solids	Vertices	Edges	Faces
Tetrahedron	4	6	4
Cube	8	12	6
Octahedron	6	12	8
Icosahedron	12	30	20
Dedocahedron	20	30	12

- Pola tersebut adalah $V - E + F = 2$

Motivasi

- Ada sebuah pola penting yang muncul pada platonic solids

Solids	Vertices	Edges	Faces
Tetrahedron	4	6	4
Cube	8	12	6
Octahedron	6	12	8
Icosahedron	12	30	20
Dedocahedron	20	30	12

- Pola tersebut adalah $V - E + F = 2$
- Pola ini juga berlaku untuk polihedron secara umum dan juga graf planar

Motivasi

- Ada sebuah pola penting yang muncul pada platonic solids

Solids	Vertices	Edges	Faces
Tetrahedron	4	6	4
Cube	8	12	6
Octahedron	6	12	8
Icosahedron	12	30	20
Dedocahedron	20	30	12

- Pola tersebut adalah $V - E + F = 2$
- Pola ini juga berlaku untuk polihedron secara umum dan juga graf planar
- Hal ini terjadi karena, secara topologi, semua polihedron dan graf planar adalah ekivalen

Tentang Ekivalensi

- Homotopi, secara kasar, adalah ekivalensi topologi saat sebuah bentuk dapat diubah menjadi bentuk lain secara kontinu tanpa harus memotong atau menempel

Tentang Ekivalensi

- Homotopi, secara kasar, adalah ekivalensi topologi saat sebuah bentuk dapat diubah menjadi bentuk lain secara kontinu tanpa harus memotong atau menempel
- Pada saat ini klasifikasi lengkap hanya ada untuk dimensi 2

Theorem

Jika M merupakan suatu permukaan, maka M pasti salah satu dari berikut:
Bola (+batas)
Bola ditambah beberapa "pegangan" (+batas)
Bola ditambah beberapa crosscaps (+batas)

- Bagaimana dengan dimensi lebih tinggi?

- Bagaimana dengan dimensi lebih tinggi?
- Masalah: Tidak mudah untuk membuktikan 2 bentuk sama atau berbeda, terutama pada dimensi tinggi

- Bagaimana dengan dimensi lebih tinggi?
- Masalah: Tidak mudah untuk membuktikan 2 bentuk sama atau berbeda, terutama pada dimensi tinggi
- Contoh: Apakah $\mathbb{R}^3$ berbeda dengan $\mathbb{S}^3$? Apakah $\mathbb{R}^3$ berbeda dengan $\mathbb{R}^4$?

Ide Dasar Algebraic Topology

- Salah satu ide dasar di Matematika adalah mencari/mendefiniskan invariant

Ide Dasar Algebraic Topology

- Salah satu ide dasar di Matematika adalah mencari/mendefiniskan invariant
- Di Algebraic Topology, ada banyak jenis invariant

Ide Dasar Algebraic Topology

- Salah satu ide dasar di Matematika adalah mencari/mendefiniskan invariant
- Di Algebraic Topology, ada banyak jenis invariant
  - Euler Characteristic

Ide Dasar Algebraic Topology

- Salah satu ide dasar di Matematika adalah mencari/mendefiniskan invariant
- Di Algebraic Topology, ada banyak jenis invariant
    - Euler Characteristic
    - Genus $\rightarrow$ Betti Number

Ide Dasar Algebraic Topology

- Salah satu ide dasar di Matematika adalah mencari/mendefiniskan invariant
- Di Algebraic Topology, ada banyak jenis invariant
  - Euler Characteristic
  - Genus $\rightarrow$ Betti Number
  - Fundamental Group $\rightarrow$ Homotopy Group

Ide Dasar Algebraic Topology

- Salah satu ide dasar di Matematika adalah mencari/mendefiniskan invariant
- Di Algebraic Topology, ada banyak jenis invariant
  - Euler Characteristic
  - Genus $\rightarrow$ Betti Number
  - Fundamental Group $\rightarrow$ Homotopy Group
  - Homology

Ide Dasar Algebraic Topology

- Salah satu ide dasar di Matematika adalah mencari/mendefiniskan invariant
- Di Algebraic Topology, ada banyak jenis invariant
  - Euler Characteristic
  - Genus $\to$ Betti Number
  - Fundamental Group $\to$ Homotopy Group
  - Homology
  - Cohomology

Ide Dasar Algebraic Topology

- Salah satu ide dasar di Matematika adalah mencari/mendefiniskan invariant
- Di Algebraic Topology, ada banyak jenis invariant
  - Euler Characteristic
  - Genus $\rightarrow$ Betti Number
  - Fundamental Group $\rightarrow$ Homotopy Group
  - Homology
  - Cohomology
  - K-Theory

Ide Dasar Algebraic Topology

- Misalkan terdapat bentuk Topologi X, Y dan fungsi kontinu $f : X \to Y$, maka terdapat:

Ide Dasar Algebraic Topology

- Misalkan terdapat bentuk Topologi X, Y dan fungsi kontinu $f : X \to Y$, maka terdapat:
- Grup $\pi_n(X)$ dan $\pi_n(Y)$ serta homomorfisma grup $\pi_n(f) : \pi_n(X) \to \pi_n(Y)$

Ide Dasar Algebraic Topology

- Misalkan terdapat bentuk Topologi X, Y dan fungsi kontinu $f : X \to Y$, maka terdapat:
- Grup $\pi_n(X)$ dan $\pi_n(Y)$ serta homomorfisma grup $\pi_n(f) : \pi_n(X) \to \pi_n(Y)$
- Grup abel $H_n(X)$ dan $H_n(Y)$ serta homomorfisma grup $H_n(f) : H_n(X) \to H_n(Y)$

Ide Dasar Algebraic Topology

- Misalkan terdapat bentuk Topologi X, Y dan fungsi kontinu $f : X \to Y$, maka terdapat:
- Grup $\pi_n(X)$ dan $\pi_n(Y)$ serta homomorfisma grup $\pi_n(f) : \pi_n(X) \to \pi_n(Y)$
- Grup abel $H_n(X)$ dan $H_n(Y)$ serta homomorfisma grup $H_n(f) : H_n(X) \to H_n(Y)$
- Ring $H^n(X)$ dan $H^n(Y)$ serta homomorfisma grup $H^n(f) : H^n(Y) \to H^n(X)$

Ide Dasar Algebraic Topology

- Misalkan terdapat bentuk Topologi X, Y dan fungsi kontinu $f : X \to Y$, maka terdapat:
- Grup $\pi_n(X)$ dan $\pi_n(Y)$ serta homomorfisma grup $\pi_n(f) : \pi_n(X) \to \pi_n(Y)$
- Grup abel $H_n(X)$ dan $H_n(Y)$ serta homomorfisma grup $H_n(f) : H_n(X) \to H_n(Y)$
- Ring $H^n(X)$ dan $H^n(Y)$ serta homomorfisma grup $H^n(f) : H^n(Y) \to H^n(X)$
- Familiar dengan konsep di atas?

De Rham Cohomology

- Pada geometri diferensial, diperlukan suatu cara mendefinisikan integral pada differentiable manifolds

De Rham Cohomology

- Pada geometri diferensial, diperlukan suatu cara mendefinisikan integral pada differentiable manifolds
- Formalisasi aljabar dari notasi Leibniz di kalkulus (dx) disebut diffential forms

De Rham Cohomology

- Pada geometri diferensial, diperlukan suatu cara mendefinisikan integral pada differentiable manifolds
- Formalisasi aljabar dari notasi Leibniz di kalkulus (dx) disebut diffential forms
- Contoh pada $\mathbb{R}^3$: 0-form, fungsi yang memiliki turunan
  1-form, $f(x,y,z)dx + g(x,y,z)dy$
  2-form, $f(x,y,z)dxdy + g(x,y,z)dydz$
  3-form, $f(x,y,z)dxdydz$

De Rham Cohomology

- Pada geometri diferensial, diperlukan suatu cara mendefinisikan integral pada differentiable manifolds
- Formalisasi aljabar dari notasi Leibniz di kalkulus (dx) disebut diffential forms
- Contoh pada $\mathbb{R}^3$: 0-form, fungsi yang memiliki turunan
  1-form, $f(x,y,z)dx + g(x,y,z)dy$
  2-form, $f(x,y,z)dxdy + g(x,y,z)dydz$
  3-form, $f(x,y,z)dxdydz$
- Turunan: $d(fdx) = f_x dx \wedge dx + f_y dy \wedge dx + f_z dz \wedge dx = -f_y dxdy - f_z dxdz$

De Rham Cohomology

- $$0\text{-form}(X) \to 1\text{-form}(X) \to 2\text{-form}(X) \to 3\text{-form}(X) \to$$

De Rham Cohomology

- $$0\text{-form}(X) \to 1\text{-form}(X) \to 2\text{-form}(X) \to 3\text{-form}(X) \to$$
- Dari Kalkulus Multivariable, kita tahu bahwa $d^2 = 0$, akibatnya rantai di atas adalah co-chain complex (Im $d \subset$ Ker d)

De Rham Cohomology

- $$0\text{-form}(X) \to 1\text{-form}(X) \to 2\text{-form}(X) \to 3\text{-form}(X) \to$$
- Dari Kalkulus Multivariable, kita tahu bahwa $d^2 = 0$, akibatnya rantai di atas adalah co-chain complex (Im $d \subset$ Ker d)
- Barisan di atas bukan merupakan barisan eksak, untuk mengetahui seberapa jauh barisan di atas menyimpang dari barisan eksak, kita definisikan $H^n = \mathrm{Ker}d/\mathrm{Im}d$

De Rham Cohomology

- $$0\text{-form}(X) \to 1\text{-form}(X) \to 2\text{-form}(X) \to 3\text{-form}(X) \to$$
- Dari Kalkulus Multivariable, kita tahu bahwa $d^2 = 0$, akibatnya rantai di atas adalah co-chain complex (Im $d \subset$ Ker d)
- Barisan di atas bukan merupakan barisan eksak, untuk mengetahui seberapa jauh barisan di atas menyimpang dari barisan eksak, kita definisikan $H^n = \text{Ker}d/\text{Im}d$
- Darimana struktur ring dan kontravarian De Rham cohomology berasal?

Simplicial Homology

- Permukaan dapat di-triangulasi, dan bentuk topologi bisa dipecah menjadi simplex

Simplicial Homology

- Permukaan dapat di-triangulasi, dan bentuk topologi bisa dipecah menjadi simplex
- n-simplex $[v_0, v_1, ..., v_n]$ didefinisikan sebagai himpunan konveks terkecil yang memuat n buah titik (n vektor bebas linear)

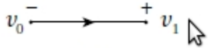
Simplicial Homology

- Permukaan dapat di-triangulasi, dan bentuk topologi bisa dipecah menjadi simplex
- n-simplex $[v_0, v_1, ..., v_n]$ didefinisikan sebagai himpunan konveks terkecil yang memuat n buah titik (n vektor bebas linear)
- 0-simplex adalah sebuah titik, 1-simplex adalah sebuah sisi, 2-simplex adalah sebuah segitiga, 3-simplex adalah sebuah tetrahedron, dst

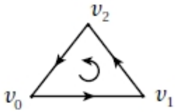
Simplicial Homology

- Permukaan dapat di-triangulasi, dan bentuk topologi bisa dipecah menjadi simplex
- n-simplex $[v_0, v_1, ..., v_n]$ didefinisikan sebagai himpunan konveks terkecil yang memuat n buah titik (n vektor bebas linear)
- 0-simplex adalah sebuah titik, 1-simplex adalah sebuah sisi, 2-simplex adalah sebuah segitiga, 3-simplex adalah sebuah tetrahedron, dst
- batas dari 1-simplex didefinisikan sebagai 0-simplex, batas dari 2-simplex adalah 2 buah 1-simplex, batas dari 3-simplex adalah 3 buah 2-simplex, dst

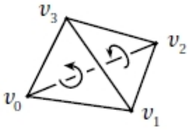
Simplicial Homology



$$\partial[v_0, v_1] = [v_1] - [v_0]$$



$$\partial[v_0, v_1, v_2] = [v_1, v_2] - [v_0, v_2] + [v_0, v_1]$$



$$\partial[v_0, v_1, v_2, v_3] = [v_1, v_2, v_3] - [v_0, v_2, v_3] + [v_0, v_1, v_3] - [v_0, v_1, v_2]$$

Simplicial Homology

- Batas dari suatu simplex didefinisikan sebagai: $d[v_0, v_1, ..., v_n] = \sum(-1)^i[v_0, ..., \hat{v}_i, ..., v_n]$

Simplicial Homology

- Batas dari suatu simplex didefinisikan sebagai: $d[v_0, v_1, ..., v_n] = \sum(-1)^i[v_0, ..., \hat{v}_i, ..., v_n]$
- Dapat diperiksa bahwa $d^2 = 0$, sehingga rantai di bawah merupakan chain complex

Simplicial Homology

- Batas dari suatu simplex didefinisikan sebagai: $d[v_0, v_1, ..., v_n] = \sum(-1)^i[v_0, ..., \hat{v}_i, ..., v_n]$
- Dapat diperiksa bahwa $d^2 = 0$, sehingga rantai di bawah merupakan chain complex
- $$\to \Delta_3(X) \to \Delta_2(X) \to \Delta_1(X) \to \Delta_0(X)$$

Simplicial Homology

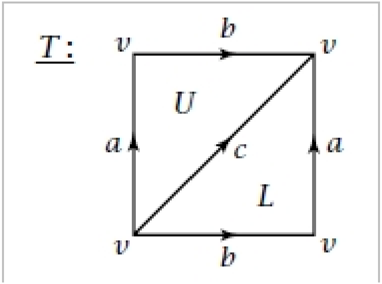
- Batas dari suatu simplex didefinisikan sebagai: $d[v_0, v_1, ..., v_n] = \sum(-1)^i[v_0, ..., \hat{v}_i, ..., v_n]$
- Dapat diperiksa bahwa $d^2 = 0$, sehingga rantai di bawah merupakan chain complex
- $$\rightarrow \Delta_3(X) \rightarrow \Delta_2(X) \rightarrow \Delta_1(X) \rightarrow \Delta_0(X)$$
- Grup Homologi didefinisikan sebagai $H_n(X) = \mathrm{Ker} d/\mathrm{Im} d$

Simplicial Homology

- Contoh, grup homologi dari torus adalah:

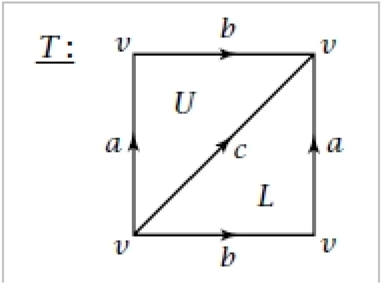
- $H_n(T) = 0$ untuk $n > 2$, $H_2(T) = \mathbb{Z}$, $H_1(T) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, $H_0(T) = \mathbb{Z}$

Simplicial Homology

- Contoh, grup homologi dari torus adalah:
- 

- $H_n(T) = 0$ untuk $n > 2$, $H_2(T) = \mathbb{Z}$, $H_1(T) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, $H_0(T) = \mathbb{Z}$

Simplicial Homology

- Contoh, grup homologi dari torus adalah:
- 

- $H_n(T) = 0$ untuk $n > 2$, $H_2(T) = \mathbb{Z}$, $H_1(T) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, $H_0(T) = \mathbb{Z}$
- Simplicial Topology memang relatif mudah dihitung, tapi apakah peta dari simplex juga merupakan simplex?

Aplikasi Aljabar di Algebraic Topology

- Teorema-teorema di Simplicial Homology tidak mudah dibuktikan, oleh karena itu didefinisikan Singular Homology

Aplikasi Aljabar di Algebraic Topology

- Teorema-teorema di Simplicial Homology tidak mudah dibuktikan, oleh karena itu didefinisikan Singular Homology
- Singular Homology secara definisi sangat cocok untuk pembuktian, dan ekivalensi antara Simplicial Homology dan Singular Homology pada dasarnya adalah 5-lemma

Aplikasi Aljabar di Algebraic Topology

- Teorema-teorema di Simplicial Homology tidak mudah dibuktikan, oleh karena itu didefinisikan Singular Homology
- Singular Homology secara definisi sangat cocok untuk pembuktian, dan ekivalensi antara Simplicial Homology dan Singular Homology pada dasarnya adalah 5-lemma
- Peralatan utama dalam perhitungan grup homologi adalah barisan Mayer-Vietoris yang pada dasarnya adalah Snake-lemma

Theorem

Jika A adalah subruang (tutup) topologi dari X maka terdapat barisan eksak

$$\to H_n(A) \to H_n(X) \to H_n(X/A) \to H_{n-1}(A) \to H_{n-1}(X) \to$$

Derived Categories

- Kelemahan pertama (co)homology: Cohomology adalah Homology dari dual sebuah chain complex bukan dual dari Homology sebuah chain complex, karena pengambilan homology tidaklah double dual.

- Masalah: (co)chain complex tidak invarian terhadap homotopy, (co)chain complex perlu dimodifikasi

Derived Categories

- Kelemahan pertama (co)homology: Cohomology adalah Homology dari dual sebuah chain complex bukan dual dari Homology sebuah chain complex, karena pengambilan homology tidaklah double dual.
- Kelemahan kedua (co)homology: Pengambilan homology mengurangi informasi

- Masalah: (co)chain complex tidak invarian terhadap homotopy, (co)chain complex perlu dimodifikasi

Derived Categories

- Kelemahan pertama (co)homology: Cohomology adalah Homology dari dual sebuah chain complex bukan dual dari Homology sebuah chain complex, karena pengambilan homology tidaklah double dual.
- Kelemahan kedua (co)homology: Pengambilan homology mengurangi informasi
- Ide dari derived category adalah tidak mengambil (co)homology tapi mengamati (co)chain complex
- Masalah: (co)chain complex tidak invarian terhadap homotopy, (co)chain complex perlu dimodifikasi

Derived Categories

- Bagaimana bentuk homotopy di (co)chain complex?

Derived Categories

- Bagaimana bentuk homotopy di (co)chain complex?
- Misalkan X dan Y dua buah bentuk topologi yang telah dipecah menjadi simplex. X dan Y homotopik jika terdapat Z dan pemetaan simplex $X \leftarrow Z \rightarrow Y$ yang menginduksi $(\Delta)_n(X) \leftarrow (\Delta)_n(Z) \rightarrow (\Delta)_n(Y)$

Derived Categories

- Bagaimana bentuk homotopy di (co)chain complex?
- Misalkan X dan Y dua buah bentuk topologi yang telah dipecah menjadi simplex. X dan Y homotopik jika terdapat Z dan pemetaan simplex $X \leftarrow Z \rightarrow Y$ yang menginduksi $(\Delta)_n(X) \leftarrow (\Delta)_n(Z) \rightarrow (\Delta)_n(Y)$
- Modifikasi yang dilakukan adalah me-lokalisasi semua pemetaan yang invarian terhadap homotopy

Derived Categories

- Bagaimana bentuk homotopy di (co)chain complex?
- Misalkan X dan Y dua buah bentuk topologi yang telah dipecah menjadi simplex. X dan Y homotopik jika terdapat Z dan pemetaan simplex $X \leftarrow Z \rightarrow Y$ yang menginduksi $(\Delta)_n(X) \leftarrow (\Delta)_n(Z) \rightarrow (\Delta)_n(Y)$
- Modifikasi yang dilakukan adalah me-lokalisasi semua pemetaan yang invarian terhadap homotopy
- Yaitu, jika terdapat $(\Delta)_n(Z)$ sehingga terdapat chain map $(\Delta)_n(X) \leftarrow (\Delta)_n(Z) \rightarrow (\Delta)_n(Y)$ maka "dianggap" terdapat isomorfisma $g : (\Delta)_n(X) \rightarrow (\Delta)_n(Y)$